A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenía la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

a) (0.75 puntos) Halle $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

b) (1.75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

b) (1.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r, que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del $80\,\%$. Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al $90\,\%$. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el $80\,\%$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.

c) (1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

Resultado:

A.1.

La orquesta tiene x intérpretes y cada coro tiene y intérpretes. Según el enunciado, hay un tercio de miembros infantiles y dos coros con cantantes solistas que no pertenecen a los coros, lo que significa que hay $\frac{1}{3}x$ miembros infantiles y 8 solistas. Además, la décima parte de ochenta es 8, lo que indica que hay 8 miembros de la orquesta que no son parte de los coros. Por lo tanto, hay $x - 8$ miembros de la orquesta que son parte de los coros.

Dado que los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta, tenemos que $2y - (\frac{1}{3}x + (x - 8)) > 140$, lo que simplifica a $2y - \frac{4}{3}x > 148$.

El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la docena parte del total de intérpretes, lo que nos da $x = \frac{y}{12} + 21$.

Resolviendo el sistema de desigualdades e igualdades obtenemos:

$2y - \frac{4}{3}(\frac{y}{12} + 21) > 148$

$2y - \frac{1}{3}y - 28 > 148$

$\frac{5}{3}y > 176$

$y > \frac{176 \cdot 3}{5}$

$y > 105.6$

Como el número de intérpretes debe ser un número entero, el mínimo número de miembros de cada coro es 106. Ahora, usando la relación entre x y y, calculamos x:

$x = \frac{106}{12} + 21$

$x = 8.8333 + 21$

$x = 29.8333$

Como el número de intérpretes debe ser un número entero, el mínimo número de miembros de la orquesta es 30.

Por lo tanto, el número total de intérpretes es $30 + 2 \cdot 106 + 8 = 250$.

A.2.

a) Para hallar el límite cuando x tiende a 1 por la derecha de $\frac{f(x)}{(x - 1)^{2/3}}$, primero simplificamos la expresión de $f(x)$:

$f(x) = x \sqrt{x^2 - 1}^2 - x^2 = x(x^2 - 1) - x^2 = x^3 - x - x^2 = x^3 - 2x^2 + x$

Ahora, calculamos el límite:

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{(x - 1)^{2/3}}$

Para resolver este límite, podemos aplicar la regla de L'Hôpital, ya que tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando x tiende a 1. Derivamos el numerador y el denominador:

$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 - 4x + 1}{\frac{2}{3}(x - 1)^{-1/3}}$

Evaluamos el límite cuando x tiende a 1:

$\frac{3(1)^2 - 4(1) + 1}{\frac{2}{3}(1 - 1)^{-1/3}} = \frac{0}{0}$

Como seguimos obteniendo una indeterminación, aplicamos nuevamente la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x \to 1^+} \frac{6x - 4}{-\frac{2}{9}(x - 1)^{-4/3}}$

Evaluamos el límite cuando x tiende a 1:

$\frac{6(1) - 4}{-\frac{2}{9}(1 - 1)^{-4/3}} = \frac{2}{0}$

El resultado es infinito, por lo que el límite es infinito.

b) Para hallar el área en el primer cuadrante comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$, integramos la diferencia entre las funciones en el intervalo donde se intersectan, que es desde $x = 1$ hasta donde $f(x)$ se hace cero. Para encontrar este punto, igualamos $f(x)$ a cero y resolvemos para x:

$x^3 - x - x^2 = 0$

$x(x^2 - x - 1) = 0$

La solución $x = 0$ no es relevante para el primer cuadrante, así que resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ para encontrar el otro punto de intersección. Usando la fórmula cuadrática, obtenemos dos soluciones, pero solo una es positiva y pertenece al primer cuadrante. Llamemos a esta solución $x = a$.

La integral que buscamos es:

$\int_{1}^{a} (x - (x^3 - 2x^2 + x)) dx$

\(= \int_{1}^{a} (2x^2 - x^3) dx \)

\(= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4
ight]_{1}^{a} \)

Evaluamos la integral desde \(x = 1 \) hasta \(x = a \) para obtener el área.

A.3.

a) Una ecuación de la recta paralela al plano \(\pi \) y que pase por el punto \((1, 1, 1) \) y tenga dirección perpendicular a \(r \) es simplemente la recta que pasa por \((1, 1, 1) \) y tiene la misma dirección que \(r \). Dado que \(r \) tiene dirección \(\langle 1, 0, 0
angle \), la recta paralela a \(\pi \) y perpendicular a \(r \) es:

\(\vec{r}(t) = \langle 1, 1, 1
angle + t\langle 1, 0, 0
angle \)

\(\vec{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1
angle \)

Por lo tanto, la ecuación paramétrica de la recta es:

\(x = 1 + t \)

\(y = 1 \)

\(z = 1 \)

b) Para hallar una ecuación de una recta que forme un ángulo de \(\frac{\pi}{4} \) radianes con la recta \(r \), y que esté contenida en el plano \(\pi \) y pase por el origen, necesitamos un vector director que tenga el mismo ángulo con el vector director de \(r \). Dado que \(r \) tiene dirección \(\langle 1, 0, 0
angle \), un vector que forme un ángulo de \(\frac{\pi}{4} \) con \(r \) en el plano \(\pi \) podría ser \(\langle 1, 1, 0
angle \), ya que su proyección en el plano \(xy \) formaría el ángulo deseado. La ecuación paramétrica de esta recta es:

\(x = t \)

\(y = t \)

\(z = 0 \)

A.4.

a) La probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos, asumiendo que la probabilidad de ganar cada partido es del 80%, es el complemento de ganar al menos uno. La probabilidad de perder un partido es $1 - 0.8 = 0.2$, y como son tres partidos, la probabilidad de perder los tres es $0.2^3 = 0.008$ o 0.8%.

b) La probabilidad de que la selección gane el tercer partido dado que ha ganado los dos primeros es del 90%, según el enunciado.

c) Para calcular la probabilidad de que la selección gane al menos uno de los dos primeros partidos y luego gane el tercero, primero calculamos la probabilidad de ganar al menos uno de los dos primeros. Esto es 1 menos la probabilidad de perder ambos, que es $(0.2)^2 = 0.04$. Por lo tanto, la probabilidad de ganar al menos uno es $1 - 0.04 = 0.96$. Ahora, multiplicamos esto por la probabilidad de ganar el tercero, que es $0.96 \cdot 0.9 = 0.864$ o 86.4%.